

Analisis dan Formalisasi Sistem Matchmaking Rating pada Game Mobile Legends: Bang Bang Menggunakan Konsep Matematika Diskret

Steven Vanako - 13525044

Program Studi Teknik Informatika

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

Institut Teknologi Bandung, Jalan Ganesha 10 Bandung

E-mail: stevenvanako1@gmail.com , 13525044@std.stei.itb.ac.id

Abstrak— Sistem matchmaking dalam permainan Multiplayer Online Battle Arena (MOBA) seperti Mobile Legends memegang peranan krusial dalam menjaga keadilan permainan dan retensi pemain. Namun, model konvensional yang mengandalkan kalkulasi rata-rata linear kerap memicu disparitas kekuatan antar-tim, tabrakan peran, dan ketidakseimbangan alokasi struktur lobi heterogen. Penelitian ini mengusulkan model formalisasi sistem matchmaking baru berbasis matematika diskret dan pendekatan probabilistik untuk mengatasi batasan-batasan kaku tersebut. Tingkat kemahiran pemain dimodelkan menggunakan distribusi normal Bayesian (μ , σ), sementara proses pencarian lawan antar-tim diwujudkan melalui Graf Partisi Dinamis Berbobot global. Guna mengeliminasi konflik peran di internal tim sebelum fase penjadwalan global, Teorema Pernikahan Hall diterapkan pada graf partisi lokal sebagai instrumen filtrasi kaku berdasarkan rekam jejak historis 50 pertandingan terakhir pemain. Hasil simulasi numerik terhadap kolam antrean kompleks menunjukkan bahwa model ini mampu menjamin penyerasian sempurna antar-peran sekaligus menghasilkan keseimbangan kompetensi yang objektif, yang diindikasikan oleh nilai bobot sisi graf mendekati nol ($W_E \rightarrow 0$). Selain itu, analisis performa komputasi menunjukkan bahwa kendala bottleneck akibat kompleksitas algoritma yang bersifat NP-hard dapat diatasi secara preventif menggunakan mekanisme relaksasi batasan toleransi deviasi seiring dengan meningkatnya waktu tunggu antrean.

Kata Kunci—sistem matchmaking; matematika diskret; graf partisi; Teorema Pernikahan Hall; sistem rating Bayesian; MOBA

I. PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Perkembangan industri e-sports dan permainan daring bergenre Massive Online Battle Arena (MOBA) telah mengalami pertumbuhan yang sangat pesat dalam satu dekade terakhir. Salah satu permainan MOBA seluler yang memiliki basis pemain terbesar di Asia Tenggara adalah Mobile Legends: Bang Bang (MLBB). Sebagai permainan kompetitif berbasis tim (5v5), retensi dan kepuasan pemain sangat bergantung pada keadilan (fairness) dan efisiensi dari sistem penjadwalan permainan atau matchmaking system [5] .

Sistem *matchmaking* modern bertugas untuk mengelompokkan 10 pemain dari kolam antrean (*queue pool*) dinamis ke dalam dua tim yang seimbang, yaitu Tim A dan Tim B. Namun, pemodelan sistem penjadwalan pada MLBB memiliki kompleksitas komputasi yang tinggi akibat keterlibatan variabel multivariabel yang saling bertolak belakang.

(1) Penilaian tingkat kemahiran pemain tidak lagi efektif jika hanya menggunakan angka linear statis, melainkan harus didekati dengan distribusi probabilistik yang memperhitungkan nilai estimasi kemahiran (μ) dan faktor ketidakpastian (σ).

(2) Struktur antrean bersifat heterogen karena sistem harus mengakomodasi lobi kelompok (*party*) dengan berbagai ukuran kardinalitas, yaitu Solo (1), Duo (2), Trio (3), dan Five-man (5).

(3) Terdapat batasan kaku terkait preferensi peran pemain guna mencegah terjadinya ketidakseimbangan taktis internal tim, yang pemenuhannya dipengaruhi oleh rekam jejak historis 50 pertandingan terakhir.

Untuk mengatasi kompleksitas tersebut, diperlukan sebuah pendekatan struktural yang mampu memetakan fenomena mekanika game ini ke dalam model yang rigid. Matematika Diskret menyediakan instrumen teoretis yang kuat untuk mengabstraksikan masalah ini. Melalui Teori Himpunan, Teori Graf Partisi, Kombinatorika, dan Algoritma Optimasi, kerumitan antrean multivariabel pada MLBB dapat diformalisasikan secara matematis guna menganalisis batas ideal serta kompleksitas komputasi sistem penjadwalan yang adil.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, dirumuskan masalah untuk dibahas di makalah ini, sebagai berikut:

1. Bagaimana memformulasikan atribut pemain, struktur lobi heterogen, dan preferensi *role* historis ke dalam notasi Teori Himpunan yang formal?
2. Bagaimana model Graf Partisi Dinamis digunakan untuk mempertemukan Tim A dan Tim B

berdasarkan kecocokan ukuran lobi dan kedekatan distribusi probabilitas kemahiran?

3. Bagaimana mengimplementasikan Teorema Pernikahan Hall untuk menjamin pemenuhan batasan kaku *role* internal tim tanpa menyebabkan kemacetan antrean?

C. Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan makalah ini adalah:

1. Membangun model formalisasi matematis untuk seluruh komponen dan batasan dalam sistem *matchmaking* MLBB menggunakan konsep Matematika Diskret.
2. Menganalisis mekanisme penyeimbangan tim berbasis graf partisi dan alokasi peran kaku secara teoretis.
3. Mengevaluasi kompleksitas komputasi dari model yang diajukan untuk memahami batasan performa sistem pada skala masif.

II. LANDASAN TEORI

A. Permainan Mobile Legends: Bang Bang

Mobile Legends: Bang Bang adalah permainan pertarungan real-time multiplayer online (MOBA) yang dimainkan dalam mode 5 versus 5 (5v5). Setiap pemain memilih satu hero dari lebih dari 117 hero yang tersedia dengan peran berbeda dan bekerja sama dalam tim untuk menghancurkan markas musuh. Sistem ranking di Mobile Legends menggunakan struktur tier yang terdiri dari tujuh kategori utama: Warrior, Elite, Master, Grand Master, Epic, Legend, dan Mythic. Masing-masing tier dibagi lagi menjadi beberapa divisi bernomor (I, II, III, IV untuk Elite dan Master, I, II, III, IV, dan V untuk tier lainnya). kecuali Mythic yang subdivisinya dibagi per rentang bintang. Pemain dapat naik tier dengan mengumpulkan bintang yang diperoleh dari kemenangan pertandingan ranked. Sistem tier ini bersifat publik dan menampilkan progres pemain, tetapi di balik sistem publik ini terdapat sistem tersembunyi yang disebut Matchmaking Rating yang menjadi acuan sebenarnya untuk pencocok pertandingan.

B. Himpunan

Teori himpunan merupakan fondasi dasar dari seluruh struktur matematika diskret yang digunakan untuk mengelompokkan objek-objek abstrak tanpa memperhatikan urutan kemunculannya. Secara formal, himpunan didefinisikan sebagai koleksi dari objek-objek yang terdefinisi dengan jelas dalam suatu semesta pembicaraan (U). Objek di dalam himpunan disebut sebagai anggota atau elemen, di mana keanggotaannya dinotasikan secara spesifik melalui simbol $\in$ untuk menyatakan anggota, dan $\notin$ untuk menyatakan bukan anggota. Ketika model komputasi beroperasi, batasan kuantitatif dari kelompok elemen ini diukur melalui konsep kardinalitas, yang menyatakan jumlah elemen unik di dalam himpunan A dan dinotasikan sebagai $|A|$.

Keterhubungan antar-kelompok objek di dalam semesta pembicaraan dijabatani oleh konsep himpunan bagian.

Himpunan A dinyatakan sebagai subset dari B (dinotasikan $A \subseteq B$) jika dan hanya jika setiap elemen yang terkandung di dalam A secara logis juga merupakan elemen dari B , atau secara formal diekspresikan melalui implikasi $\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$. Jika struktur antrean sistem memerlukan pemisahan entitas yang tidak saling tumpang tindih, digunakanlah operasi himpunan saling lepas. Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas jika dan hanya jika operasi irisan keduanya menghasilkan himpunan kosong, yang secara formal dituliskan sebagai $A \cap B = \emptyset$. Melalui manipulasi operasi dasar seperti irisan, gabungan, dan selisih, teori himpunan mampu mengabstraksikan kolam antrean pemain yang dinamis ke dalam ruang lingkup matematis yang kaku.

Gbr. 1. Diagram Venn (Himpunan Saling Lepas & Subset)



C. Relasi dan Fungsi

Abstraksi objek melalui teori himpunan selanjutnya dikembangkan untuk memodelkan hubungan keterikatan antar-entitas melalui teori relasi dan fungsi. Landasan dari pembentukan relasi struktural ini adalah Produk Kartesian, yang mendefinisikan himpunan semua pasangan terurut (a, b) dari dua himpunan A dan B , dengan notasi $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$. Sebuah relasi biner R kemudian dibentuk sebagai himpunan bagian dari produk Kartesian tersebut ($R \subseteq A \times B$), yang merepresentasikan ikatan atau kedekatan parameter tertentu antara satu elemen dengan elemen lainnya di dalam sistem antrean.

Ketika sebuah relasi dituntut untuk memiliki kepastian pemetaan yang tunggal, relasi tersebut bertransformasi menjadi sebuah fungsi. Fungsi f dari himpunan domain A ke kodomain B (dinotasikan $f: A \rightarrow B$) adalah bentuk relasi khusus yang memetakan setiap elemen $a \in A$ ke tepat satu elemen $b \in B$, yang dituliskan sebagai fungsi $f(a) = b$. Berdasarkan karakteristik pemetaannya, fungsi diklasifikasikan menjadi tiga properti utama, yaitu injektif yang menjamin tidak ada dua elemen domain berbeda memiliki bayangan yang sama, surjektif yang memastikan seluruh area kodomain mendapatkan pasangan, serta bijektif yang memenuhi kedua sifat tersebut sekaligus. Karakteristik pemetaan inilah yang nantinya diadopsi oleh sistem untuk mengonversikan performa mentah pemain di lapangan menjadi visualisasi angka kemahiran yang presisi.

D. Teori Graf

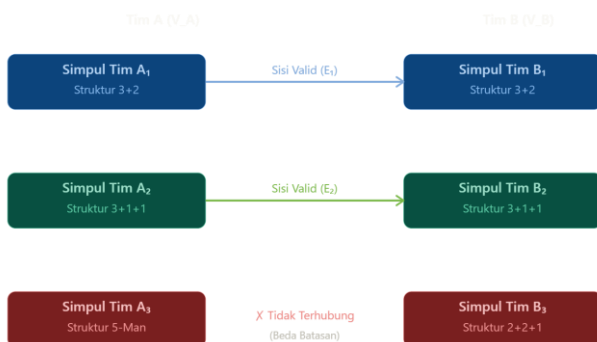
Hubungan fungsi dan relasi antar-elemen diskret dapat divisualisasikan secara struktural dan geometris melalui implementasi teori graf. Sebuah graf G didefinisikan secara formal sebagai pasangan terurut $G = (V, E)$, di mana V merupakan himpunan tidak kosong dari simpul-simpul yang mewakili entitas, dan E adalah himpunan sisi yang memodelkan hubungan langsung antar-simpul tersebut. Dalam sistem komputasi yang kompleks, sisi-sisi ini sering kali diberikan nilai numerik spesifik untuk membentuk graf berbobot, di mana bobot tersebut merepresentasikan tingkat kedekatan atau biaya yang dibutuhkan untuk menghubungkan dua simpul.

Sistem antrian multivariabel yang memisahkan dua kubu berbeda secara ketat membutuhkan model khusus yang dikenal sebagai Graf Partisi. Pada graf partisi, himpunan simpul V dipisah menjadi dua subset yang saling lepas dan komplemen, sebut saja V_1 dan V_2 , dengan syarat kaku $V = V_1 \cup V_2$ dan $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Keunikan utama dari graf ini terletak pada aturan pembentukan sisinya, di mana setiap sisi $e = (u, v) \in E$ hanya diizinkan untuk menghubungkan simpul dari kelompok V_1 ke kelompok V_2 , atau secara formal ditulis:

$$\forall e = (u, v) \in E \Rightarrow (u \in V_1 \wedge v \in V_2) \vee (u \in V_2 \wedge v \in V_1) \quad (1)$$

Struktur ini melarang keras adanya sisi internal yang menghubungkan sesama simpul di dalam kelompok V_1 maupun sesama simpul di dalam V_2 . Apabila setiap simpul di V_1 terhubung secara masif dengan seluruh simpul yang ada di V_2 , maka graf tersebut bertransformasi menjadi Graf Partisi Lengkap ($K_{m,n}$). Karakteristik partisi dua kubu inilah yang menjadi alat utama bagi algoritma untuk menyusun skenario pertempuran antar-tim tanpa melibatkan bias hubungan internal [3].

Gbr. 2. Graf Partisi (Bipartite Graph Matchmaking)



E. Kombinatorika

Ketika graf partisi menyediakan struktur jaringan antrian, algoritma membutuhkan metode analisis kuantitatif untuk mengukur seberapa banyak kemungkinan formasi yang dapat terbentuk di dalam jaringan tersebut, yang dipelajari melalui

ilmu kombinatorika. Cabang matematika ini didasari oleh dua kaidah pengoperasian utama, yaitu Kaidah Perkalian untuk menghitung banyaknya cara dari prosedur yang berjalan beriringan, dan Kaidah Penjumlahan untuk menghitung total cara dari prosedur-prosedur mandiri yang saling lepas. Kedua kaidah ini menjadi fondasi awal komputer dalam mengkalkulasi ruang pencarian dari kombinasi elemen yang tersedia.

Di atas kaidah pencacahan dasar tersebut, operasi Kombinasi digunakan sebagai instrumen utama untuk menyusun subset tim dari kolam pemain yang heterogen. Berbeda dengan permutasi, kombinasi melakukan pemilihan sejumlah r objek dari total n objek yang tersedia tanpa memedulikan urutan posisinya. Secara formal, banyaknya kemungkinan susunan kombinasi ini diekspresikan melalui notasi binomial $C(n,r)$, yang dihitung menggunakan rumus faktorial:

$$C(n, r) = n! / (r!(n - r)!) \quad (1)$$

Melalui perhitungan kombinatorika ini, sistem dapat memprediksi lonjakan beban komputasi secara teoritis ketika jumlah entitas di dalam kolam antrian bertambah secara eksponensial, sehingga optimasi batas atas pencarian dapat ditentukan dengan bijak.

F. Teorema Pernikahan Hall

Setelah ruang kombinasi tim berhasil dihitung, tantangan internal berikutnya adalah memastikan bahwa elemen-elemen di dalam tim tersebut dapat dialokasikan ke dalam peran-peran spesifik tanpa menimbulkan konflik kepentingan. Penyelesaian masalah batasan kaku ini diselesaikan secara elegan melalui Teorema Pernikahan Hall. Teorema ini bekerja pada sebuah graf partisi lokal yang menghubungkan himpunan sub-entitas dengan himpunan peran yang tersedia. Langkah awal pengujian dilakukan dengan mendefinisikan konsep tetangga himpunan, dinotasikan sebagai $N(S)$, yang merangkum seluruh simpul peran di seberang partisi yang terhubung langsung dengan subset elemen S .

Teorema Hall menyatakan bahwa sebuah penyerasian yang mampu mengakomodasi seluruh elemen di dalam subset dapat terbentuk jika dan hanya jika Kondisi Hall terpenuhi. Kondisi ini mensyaratkan ketaksamaan kaku di mana jumlah opsi peran unik yang dapat diakses oleh elemen kelompok S tidak boleh lebih kecil daripada jumlah anggota kelompok S itu sendiri, yang secara formal dituliskan:

$$\forall S \subseteq V_1, |N(S)| \geq |S| \quad (1)$$

Jika ketaksamaan ini dilanggar oleh salah satu subset saja, maka secara matematis dapat dibuktikan bahwa sistem akan mengalami kegagalan alokasi kaku. Sebaliknya, jika kondisi ini terpenuhi secara sempurna dan kardinalitas kedua kelompok seimbang, graf dijamin memiliki Penyerasian Sempurna, di mana setiap elemen mendapatkan tepat satu pasangan peran unik yang sesuai dengan kapabilitasnya.

Gbr. 3. Teorema Pernikahan Hall (Perfect Matching vs Role Clash)



G. Distribusi Probabilitas Kemahiran (Sistem Rating Bayesian)

Meskipun seluruh batasan alokasi peran dan struktur graf telah terpenuhi, penilaian keadilan akhir dari sebuah penjadwalan tetap bergantung pada representasi kuantitatif dari tingkat kemahiran masing-masing entitas yang bersifat abstrak. Untuk mematangkan pemodelan ini, matematika diskret mengadopsi pendekatan probabilistik kontinu dari Sistem Rating Bayesian. Sistem ini memandang tingkat kemahiran aktual seorang pemain sebagai sebuah variabel acak kontinu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ [1]. Kurva kerapatan probabilitas dari performa ini dikontrol oleh fungsi eksponensial:

$$f(x) = 1/(\sigma\sqrt{2\pi}) \cdot \exp(-(x - \mu)^2 / (2\sigma^2))$$

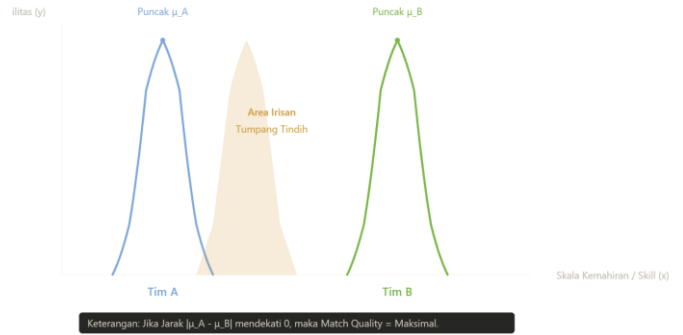
Di dalam fungsi tersebut, terdapat dua parameter krusial yang menentukan bentuk kurva, yaitu Nilai Rata-rata (μ) yang merepresentasikan estimasi titik kemahiran tertinggi milik pemain, dan Nilai Ketidakpastian (σ) yang bertindak sebagai deviasi standar untuk mengukur tingkat keraguan sistem terhadap akurasi nilai μ tersebut.

Ketika sekelompok pemain bergabung membentuk satu kesatuan tim yang utuh, total kemahiran dari tim tersebut dihitung dengan memanfaatkan prinsip aditif variabel acak independen. Jika sebuah tim dibentuk oleh 5 pemain yang saling independen, maka total distribusi kemahiran tim T merupakan variabel acak baru yang nilai rata-rata (μ_T) dan variansnya (σ_T^2) dirumuskan secara linear sebagai:

$$\mu_T = \sum_{i=1 \text{ to } 5} \mu_i \quad \text{dan} \quad \sigma_T^2 = \sum_{i=1 \text{ to } 5} \sigma_i^2$$

Berdasarkan formulasi tersebut, dua tim yang bertanding dinyatakan seimbang secara probabilistik apabila area tumpang tindih di antara kedua kurva Gauss total tim tersebut bernilai signifikan. Nilai interseksi probabilitas inilah yang melandasi keputusan sistem dalam menentukan validitas kelayakan pertandingan sebelum kedua tim dilepaskan ke dalam arena permainan.

Gbr. 4. Kurva Gauss Ganda (Match Quality / Irisan Probabilitas)



III. ANALISIS MASALAH DAN MODEL FORMALISASI SISTEM

A. Formulasi Atribut Diskret Pemain, Lobi, dan Peran

Untuk membangun model matematika yang utuh, setiap entitas di dalam kolom antrean harus didefinisikan ke dalam notasi himpunan formal. Misalkan adalah semesta pembicaraan yang merepresentasikan seluruh pemain yang sedang berada dalam fase pencarian pertandingan pada waktu t . Setiap pemain $p_i \in \mathcal{U}$ diwakili oleh vektor multi-atribut diskret dan probabilistik:

$$p_i = \langle M(p_i), R_{p_i}, W_H(p_i, r) \rangle$$

Di mana $M(p_i)$ menyatakan nilai rating berbasis distribusi Bayesian yang menangani performa probabilistik pemain, dirumuskan sebagai pasangan terurut:

$$M(p_i) = (\mu_i, \sigma_i) \text{ dengan } \mu_i \in \mathbb{R} \text{ dan } \sigma_i \in \mathbb{R}^+$$

Parameter μ_i menunjukkan nilai rata-rata estimasi kompetensi pemain, sedangkan σ_i menunjukkan tingkat ketidakpastian sistem terhadap rating tersebut.

Kombinasi struktural dari pemain yang mengantre bersama diakomodasi melalui Himpunan Lobi ($\mathcal{L}$). Kolam antrean $\mathcal{U}$ merupakan gabungan dari lobi-lobi saling lepas, $\mathcal{U} = \bigcup \mathcal{L}_K$, di mana setiap lobi $\mathcal{L}_K \subset \mathcal{U}$ memiliki batasan kardinalitas yang kaku sesuai dengan aturan mekanika permainan:

$$|\mathcal{L}_K| \in \{1, 2, 3, 5\}$$

Selanjutnya, didefinisikan semesta peran global $\mathcal{R} = \{\text{Jungler, Roamer, Midlaner, Goldlaner, Explaner}\}$ dengan $|\mathcal{R}| = 5$. Setiap pemain memiliki himpunan bagian peran aktif $R_{p_i} \subseteq \mathcal{R}$ yang dipilih saat memasuki antrean, dengan batasan jumlah pilihan $2 \leq |R_{p_i}| \leq 5$. Untuk memberikan pembobotan empiris pada peran tersebut, sistem menggunakan memori historis melalui fungsi bobot W_H :

$$W_H(p_i, r) = C_{50}(p_i, r) / 50$$

Di mana $C_{50}(p_i, r)$ adalah fungsi pencacah yang menghitung berapa kali pemain p_i menggunakan peran $r \in R_{p_i}$ dalam 50

pertandingan terakhir. Jika $W_H(p_i, r) = 0$, peran tersebut dieliminasi dari preferensi aktif pemain untuk iterasi antrean saat ini guna menjamin akurasi representasi kemampuan aktual.

B. Analisis Masalah Matchmaking

Proses penjadwalan dalam game MOBA pada dasarnya adalah sebuah masalah optimasi multiobjektif di bawah batasan kaku (multi-objective optimization under strict constraints). Terdapat tiga titik masalah komputasi utama yang dianalisis dalam model ini:

(1) Masalah Partisi Ukuran Lobi: Sistem harus menyusun kombinasi beberapa lobi L_K sedemikian rupa sehingga membentuk satu tim beranggotakan tepat 5 orang. Kompleksitas muncul karena sistem harus menjaga keadilan struktur antrean. Mempertemukan tim yang dibentuk dari lobi $(3 + 2)$ dengan tim bercabang $(1 + 1 + 1 + 1 + 1)$ (Solo) akan menciptakan disparitas koordinasi yang melanggar asas keadilan permainan [4].

(2) Masalah Ketercukupan Sempurna Peran: Penggabungan lobi-lobi heterogen berisiko memicu tabrakan peran (role clash). Masalah matematika yang diselesaikan di sini adalah memastikan bahwa dari kombinasi 5 pemain yang terpilih, tidak ada satu pun peran esensial dalam R yang kosong, dan tidak ada akumulasi pemain yang hanya menguasai peran yang sama.

(3) Masalah Overlap Distribusi Kemahiran: Penyeimbangan kekuatan antar-tim tidak dapat lagi dihitung menggunakan operasi aritmetika rata-rata linear sederhana. Masalah utamanya adalah bagaimana meminimalkan jarak antara dua distribusi probabilitas total dari kedua tim, sehingga probabilitas menang-kalah kedua belah pihak berada pada titik setimbang 50%.

C. Pemodelan Graf Partisi Dinamis

Pencarian lawan antar-tim dimodelkan menggunakan Graf Partisi Dinamis Berbobot $G = (V_A, V_B, E)$. Berbeda dengan graf statis, graf ini dibentuk secara berkala pada setiap jendela waktu pencarian t .

Himpunan simpul V_A merepresentasikan semua kemungkinan kombinasi susunan Tim A yang valid, sedangkan V_B merepresentasikan kemungkinan susunan Tim B yang valid. Sebuah simpul $u \in V_A$ terbentuk jika susunan 5 pemain di dalamnya merupakan gabungan lobi yang memenuhi syarat kardinalitas $\sum |L_K| = 5$. Sebuah sisi berbobot $e = (u, v) \in E$ hanya dapat terbentuk yang menghubungkan simpul $u \in V_A$ dan $v \in V_B$ jika dan hanya jika komposisi struktur lobi antara kedua simpul tersebut bernilai identik atau berada dalam batas toleransi struktural.

Bobot dari sisi tersebut, dinotasikan sebagai $W_E(u, v)$, ditentukan berdasarkan metrik jarak kedekatan distribusi normal dari kedua kandidat tim. Total nilai kemahiran untuk masing-masing kandidat tim dihitung melalui operasi penjumlahan variabel acak independen:

$$\mu_{\text{Tim}} = \sum_{i=1}^5 \mu_i \text{ dan } \sigma_{\text{Tim}}^2 = \sum_{i=1}^5 \sigma_i^2$$

Fungsi bobot sisi $W_E(u, v)$ yang memetakan kualitas kecocokan (match quality) antara Tim A (u) dan Tim B (v) dirumuskan dengan memanfaatkan formula deviasi gabungan:

$$W_E(u, v) = |\mu_A - \mu_B| / \sqrt{(\sigma_A^2 + \sigma_B^2)}$$

Algoritma sistem matchmaking bertugas untuk melakukan pencarian penyerasian (matching) pada graf G yang meminimalkan nilai $W_E(u, v)$. Semakin nilai W_E mendekati nol, semakin adil pertandingan yang akan tercipta.

D. Formalisasi Batasan Kaku Peran Menggunakan Bipartite Matching Lokal

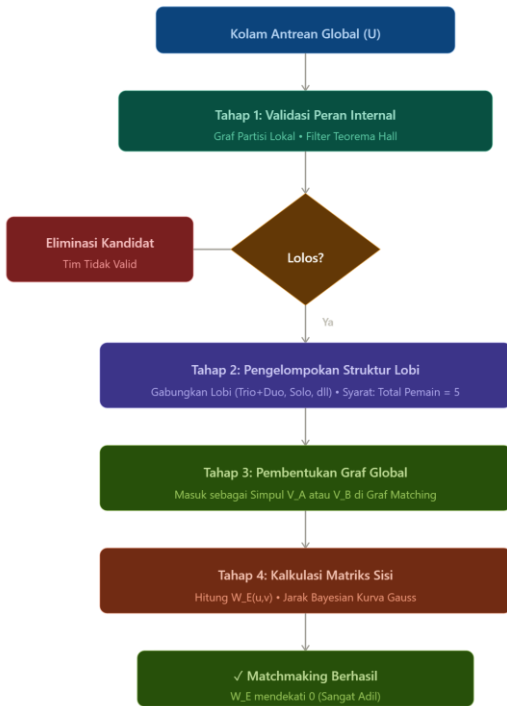
Sebelum sebuah simpul kandidat tim dimasukkan ke dalam himpunan V_A atau V_B , kandidat tersebut harus lolos dari uji kelayakan alokasi peran internal menggunakan konsep Graf Partisi Lokal $G_{\text{local}} = (T, R, E_{\text{local}})$. Di mana T adalah himpunan 5 pemain di dalam kandidat tim tersebut, R adalah himpunan 5 peran global, dan E_{local} adalah sisi yang menghubungkan pemain $p_i \in T$ ke peran $r \in R$ jika $r \in R_{p_i}$ dan $W_H(p_i, r) > 0$.

Untuk memastikan tim tidak mengalami tabrakan peran, diterapkan Teorema Pernikahan Hall. Sistem memeriksa setiap kemungkinan subset pemain $S \subseteq T$. Evaluasi kelayakan dilakukan dengan menguji kondisi ketaksamaan:

$$\forall S \subseteq T, |N(S)| \geq |S|$$

Di mana $N(S)$ adalah himpunan peran unik yang dapat diisi oleh subset pemain S berdasarkan relasi pada E_{local} . Jika terdapat satu saja subset S yang melanggar kondisi ini (misalnya, terdapat subset S dengan $|S| = 3$ namun $|N(S)| = 2$, yang berarti tiga pemain memperebutkan dua peran yang sama), maka kondisi Hall tidak terpenuhi. Kandidat tim tersebut langsung dieliminasi dan tidak dimasukkan ke dalam simpul graf partisi global karena dijamin akan memicu role clash yang merusak ekosistem permainan. Hanya tim yang menghasilkan penyerasian sempurna yang dinyatakan lolos ke tahap penjadwalan antar-tim.

Gbr. 5. Pipeline Formalisasi Sistem Matchmaking



IV. SIMULASI KASUS, PEMBAHASAN, DAN KOMPLEKSITAS KOMPUTASI

A. Skenario Antrean Berbasis Lobi Kompleks

Untuk menguji keandalan model formal yang telah dirancang pada Bab III, berikut disajikan sebuah skenario simulasi dengan kolam antrean dinamis yang terdiri dari 10 pemain dengan variasi ukuran lobi, performa probabilistik, serta preferensi peran historis yang terekam pada Tabel 4.1 [2].

Tabel 4.1. Data Atribut Kolam Antrean Pemain Simulasi (Terlampir)

B. Simulasi Perhitungan dan Pembentukan Tim

Proses pengerjaan algoritma dipecah menjadi tiga tahapan kalkulasi terstruktur berdasarkan data pada Tabel 4.1.

Langkah 1: Penggabungan Lobi dan Validasi Komposisi Struktural

Sistem menyaring kombinasi lobi untuk membentuk entitas tim beranggotakan 5 orang. Dari data di atas, lobi yang tersedia adalah dua lobi Trio (L_1, L_3) dan dua lobi Duo (L_2, L_4). Aliansi struktural yang memenuhi syarat $\Sigma|L_K| = 5$ adalah menggabungkan Trio dengan Duo. Terbentuk dua kandidat simpul tim:

- Simpul Tim A (u): Gabungan L_1 dan L_2 (Pemain $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$). Ukuran struktur: 3+2.
- Simpul Tim B (v): Gabungan L_3 dan L_4 (Pemain $\{p_6, p_7, p_8, p_9, p_{10}\}$). Ukuran struktur: 3+2.

Karena kedua simpul memiliki karakteristik struktur lobi yang identik (3+2 melawan 3+2), maka sisi kelayakan $e = (u, v)$ dapat digambar pada graf partisi global.

Langkah 2: Pengujian Teorema Pernikahan Hall pada Internal Tim

Sebelum menyetujui sisi tersebut, dilakukan pengujian bipartite matching lokal untuk alokasi peran pada masing-masing simpul tim.

Pengujian pada Simpul Tim A: Misalkan diambil subset pemain $S = \{p_2, p_4\}$. Dari data historis, $N(S) = \{\text{Midlaner, Goldlaner}\}$. Nilai $|N(S)| = 2 \geq |S| = 2$ (Memenuhi). Jika diuji untuk seluruh kemungkinan subset hingga $S = \text{TA}$, didapatkan penyerasian sempurna: $p_1 \rightarrow \text{Jungler}$, $p_2 \rightarrow \text{Midlaner}$, $p_3 \rightarrow \text{Explaner}$, $p_4 \rightarrow \text{Goldlaner}$, dan $p_5 \rightarrow \text{Roamer}$. Sifat $|N(S)| \geq |S|$ terpenuhi di setiap lini, sehingga Tim A valid.

Pengujian pada Simpul Tim B: Melalui kalkulasi serupa, didapatkan penyerasian sempurna tanpa konflik: $p_6 \rightarrow \text{Jungler}$, $p_7 \rightarrow \text{Midlaner}$, $p_8 \rightarrow \text{Roamer}$, $p_9 \rightarrow \text{Goldlaner}$, dan $p_{10} \rightarrow \text{Explaner}$. Tim B dinyatakan valid.

Langkah 3: Kalkulasi Nilai Bobot Sisi Kemahiran Probabilistik

Setelah kedua tim lolos uji peran, hitung nilai distribusi normal total untuk menentukan bobot kedekatan $W_E(u, v)$.

$$\mu_A = 2500 + 2400 + 2600 + 2550 + 2350 = 12400$$

$$\sigma_A^2 = 30^2 + 40^2 + 25^2 + 35^2 + 50^2 = 900 + 1600 + 625 + 1225 + 2500 = 6850$$

$$\mu_B = 2480 + 2510 + 2420 + 2620 + 2380 = 12410$$

$$\sigma_B^2 = 30^2 + 20^2 + 45^2 + 15^2 + 55^2 = 900 + 400 + 2025 + 225 + 3025 = 6575$$

Masukkan nilai total mean dan varians ke dalam fungsi bobot sisi $W_E(u, v)$:

$$W_E(u, v) = |12400 - 12410| / \sqrt{(6850 + 6575)} = 10 / \sqrt{13425} = 10 / 115.86 \approx 0.086$$

Nilai deviasi 0.086 berada jauh di bawah ambang batas toleransi standar sistem (biasanya $\theta = 0.5$). Dengan demikian, sisi ini memiliki kualitas kecocokan yang sangat tinggi, dan pertandingan antara Tim A dan Tim B resmi dieksekusi oleh sistem.

C. Analisis Kompleksitas Algoritma

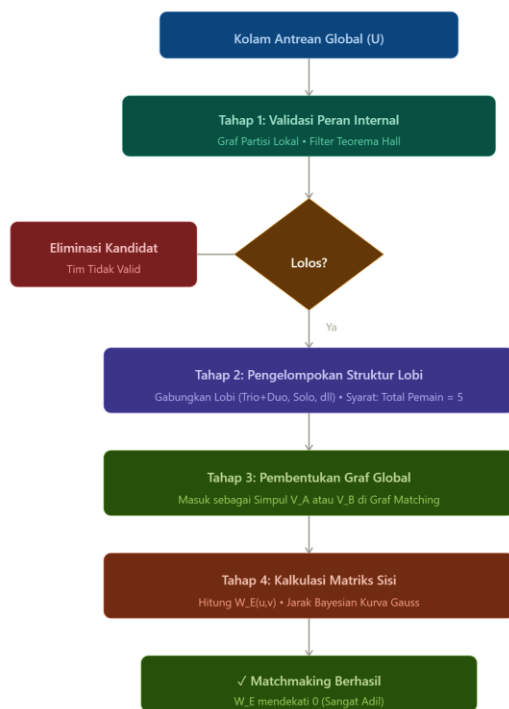
Formulasi matematis yang melibatkan banyak batasan kaku ini memiliki implikasi langsung terhadap performa komputasi server. Proses pencarian tim yang ideal masuk ke dalam kategori masalah NP-hard. Hal ini disebabkan oleh kombinasi pencarian subset untuk mencocokkan ukuran lobi yang berjalan beriringan dengan permutasi pengecekan Teorema Hall untuk 5 elemen pemain.

Secara teoritis, jika terdapat n lobi di dalam kolam antrean, kompleksitas untuk menghasilkan seluruh kombinasi simpul tim yang valid adalah $O(n^k)$, di mana k ditentukan oleh partisi ukuran lobi. Pada setiap simpul yang terbentuk, pengecekan kondisi Hall untuk memastikan ketercukupan peran

membutuhkan waktu kompleksitas eksponensial terhadap jumlah pemain dalam tim, yaitu $O(2^m)$ di mana $m = 5$ (jumlah anggota tim). Karena nilai m konstan berukuran kecil ($m=5$), operasi lokal ini memakan waktu $2^5 = 32$ langkah komputasi, yang masih sangat efisien untuk dieksekusi.

Namun, kendala utama muncul pada skala makro global graf partisi. Ketika jumlah pemain aktif melonjak tinggi, pencarian pasangan simpul dengan bobot sisi W_E terkecil dalam matriks ketetanggaan berukuran besar akan memicu lonjakan beban memori. Jika batas waktu antrean t terlampaui dan kecocokan ideal $W_E \rightarrow 0$ belum ditemukan, sistem secara dinamis harus melakukan pelonggaran parameter (relaxing constraints). Langkah pelonggaran dilakukan dengan memperbesar nilai toleransi deviasi standar σ , sehingga area tumpang tindih kurva dipaksa meluas agar komputasi graf dapat segera diselesaikan demi menghindari penumpukan antrean (bottleneck).

Gbr. 6. Grafik Hubungan Waktu Tunggu vs Relaksasi Batasan σ



V. KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Berdasarkan seluruh hasil pemodelan formal dan simulasi kasus yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa pendekatan matematika diskrit melalui teori himpunan, teori graf partisi, dan kombinatorika mampu memformalkan kerumitan variabel multivariabel pada sistem matchmaking Mobile Legends secara sistematis dan terstruktur. Implementasi Teorema Pernikahan Hall pada graf partisi lokal terbukti efektif menjadi instrumen validasi kaku untuk mencegah terjadinya tabrakan peran (role clash) internal tim dengan cara menyaring kombinasi preferensi pemain

berdasarkan rekam jejak historis 50 pertandingan terakhir mereka sebelum pertandingan dimulai. Selain itu, pemodelan kemahiran pemain menggunakan distribusi normal Bayesian (μ, σ) memberikan hasil penyeimbangan kekuatan tim yang jauh lebih akurat dan objektif dibandingkan dengan perhitungan rata-rata linear konvensional, di mana indikator keadilan akhir dapat diukur secara presisi melalui minimalisasi nilai bobot sisi pada graf partisi global.

B. Saran

Meskipun model formal yang diajukan telah mampu menyelesaikan masalah batasan kaku peran dan keseimbangan tim, penelitian ini dapat dikembangkan lebih lanjut melalui penambahan variabel dinamis, seperti fungsi penalti diskret pada nilai varians (σ) yang memperhitungkan stabilitas latensi jaringan (ping) pemain serta tingkat toksisitas (credit score) secara real-time. Di samping itu, mengingat kompleksitas komputasi pencarian pasangan global sistem ini bersifat NP-hard yang berisiko memicu lonjakan beban server, eksplorasi penggunaan algoritma heuristik seperti Genetic Algorithm (GA) atau Ant Colony Optimization (ACO) sangat disarankan untuk studi masa depan guna mempercepat proses pencarian subgraf matching pada kolam antrean yang berskala masif.

UCAPAN TERIMA KASIH

Pada kesempatan ini penulis menyampaikan apresiasi dan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada Tuhan Yang Maha Esa, dosen mata kuliah IF1220 Matematika Diskrit, keluarga penulis, serta teman-teman yang telah memberikan dukungan selama penyusunan makalah ini. Semoga dedikasi dan kebaikan yang telah diberikan mendapatkan balasan yang terbaik.

REFERENSI

- [1] R. Herbrich, T. Minka, and T. Graepel, "TrueSkill™: A Bayesian skill rating system," in *Advances in Neural Information Processing Systems 19*, B. Schölkopf, J. Platt, and T. Hofmann, Eds. Cambridge, MA: MIT Press, 2007, pp. 569-576.
- [2] Y. Agusta and R. S. Oetama, "Model simulasi antrian matchmaking dalam permainan massive online battle arena menggunakan algoritma k-nearest neighbor," *J. Telekomun. Komput.*, vol. 12, no. 2, pp. 85-94, Agustus 2024.
- [3] V. Bulitko and N. Sturtevant, "Graph matching algorithms for multiplayer online battle arena games," *IEEE Trans. Games*, vol. 11, no. 3, pp. 215-224, September 2019.
- [4] R. M. N. Halim, "Implementasi algoritma BFS pada bot online matchmaking dan pembentukan tim seimbang," unpublished.
- [5] X. Sheng, Y. Chen, and J. Zhang, "Matchmaking problems in MOBA games and mitigation strategies," *J. Game Dev. Res.*, in press.

LAMPIRAN

Tabel 4.1.

ID Pemain	ID Lobi	Ukuran	μ	σ	Preferensi Peran	Historis
p_1	L_1	3	2500	30	Jungler, Goldlaner	J(0.8), G(0.2)
p_2	L_1	3	2400	40	Midlaner, Roamer	M(1.0)
p_3	L_1	3	2600	25	Explaner, Roamer	E(0.6), R(0.4)
p_4	L_2	2	2550	35	Goldlaner, Midlaner	G(0.7), M(0.3)
p_5	L_2	2	2350	50	Roamer, Explaner	R(0.9), E(0.1)
p_6	L_3	3	2480	30	Jungler, Explaner	J(0.5), E(0.5)
p_7	L_3	3	2510	20	Midlaner, Goldlaner	M(0.6), G(0.4)
p_8	L_3	3	2420	45	Roamer, Midlaner	R(1.0)
p_9	L_4	2	2620	15	Goldlaner, Jungler	G(0.8), J(0.2)
p_{10}	L_4	2	2380	55	Explaner, Roamer	E(1.0)

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 19 Juni 2026



Steven Vanako – 13525044